

Научная статья / Research Article  
<https://doi.org/10.55959/LPEJ-24-07>  
УДК/UDC 159.9.075, 159.922.8

## Психологические аспекты введения старших дошкольников в математику

А.Н. Веракса<sup>1,2</sup>, А.Н. Сиднева<sup>1,2</sup> ✉

<sup>1</sup> Федеральный научный центр психологических и междисциплинарных исследований, Москва, Российская Федерация

<sup>2</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация

✉ [asidneva@yandex.ru](mailto:asidneva@yandex.ru)

### Резюме

**Актуальность.** Актуальность исследования психологических аспектов введения старших дошкольников в математику обусловлена широким распространением раннего обучения начальным математическим представлениям, которое зачастую не только не помогает, но может даже вредить дальнейшему развитию ребенка, поскольку используемые для этого методики не учитывают специфику как возрастно-психологических особенностей дошкольника, так и результаты психологических исследований в области содержания, методов и средств формирования начальных математических представлений.

**Цель.** Целью исследования являлся анализ сравнительной эффективности разных типов знаково-символического опосредования при формировании начальных математических представлений у старших дошкольников с разным уровнем развития регуляторных функций.

**Выборка.** Выборка исследования составила  $N = 133$  старших дошкольника (6–7 лет).

**Методы.** Для оценки уровня развития регуляторных функций использовались субтесты NEPSY-II, методика «Сортировка карточек по изменяемому признаку» («The Dimensional Change Card Sort») и методика «Схематизация» Л.А.Венгера. Для оценки уровня развития методических представлений использовался набор заданий на каждую из трех величин — длину, площадь и объем.

**Результаты.** Обнаружены значимые различия между приростом математических умений детей, обучавшимися с использованием как знаковых, так и символических средств с детьми из контрольной группы. Значимых отличий в приросте у детей, которые обучались с помощью средств-моделей, от контрольной группы обнаружено не было. В группах, где использовались средства-символы или средства-знаки, дети с разным уровнем регуляции обучились с равной степенью эффективности, однако уровень регуляции оказался критичным при обучении по наиболее сложной программе — с помощью средств-моделей.

**Выводы.** Эффективность усвоения начальных математических представлений у старших дошкольников обусловлена в первую очередь характером содержания обучения, которое должно обеспечивать разумность действий детей. Однако чем сложнее это содержание и чем более сложные знаково-символические средства используются при обучении, тем больше требований предъявляется к уровню развития регуляторных функций детей.

**Ключевые слова:** начальные математические представления, старший дошкольный возраст, регуляторные функции, знаково-символические средства, величина

**Для цитирования:** Веракса, А.Н., Сиднева, А.Н. (2024). Психологические аспекты введения старших дошкольников в математику. *Вестник Московского университета. Серия 20. Педагогическое образование*, 22(1), 130–160. <https://doi.org/10.55959/LPEJ-24-07>

## Psychological Aspects of Introducing Older Preschoolers to Mathematics

Alexander N. Veraksa<sup>1, 2</sup>, Anastasia N. Sidneva<sup>1, 2</sup> ✉

<sup>1</sup> Federal Scientific Centre for Psychological and Multidisciplinary Research, Moscow, Russian Federation

<sup>2</sup> Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

✉ [asidneva@yandex.ru](mailto:asidneva@yandex.ru)

### Abstract

**Background.** The study of the psychological aspects of the introduction of older preschoolers into mathematics is relevant due to the widespread early teaching

of elementary mathematical concepts. This practice often not only does not help, but may even harm the further development of the child, since the methods used for this do not take into account the specifics of both the age-psychological characteristics of the preschooler, and the results of psychological research in the field of content, methods and means applied to formation of initial mathematical representations.

**Objectives.** The aim of the study was to analyze the comparative effectiveness of different types of sign-symbolic mediation in the formation of initial mathematical representations in older preschoolers with different levels of development of regulatory functions.

**Study Participants.** The study sample included 133 older preschoolers (6–7 years old).

**Methods.** To assess the level of development of regulatory functions, the NEPSY-II subtests, the “The Dimensional Change Card Sort” technique and L.A.Wenger’s “Schematization” technique were used. To assess the level of development of methodological concepts, a set of tasks was used for each of the three values — length, area, and volume.

**Results.** Significant differences were found between the increase in mathematical skills of children who studied using both sign and symbolic means as compared to the children from the control group. There were no significant differences in this increase between children who were trained with the help of model tools and the control group. In groups where symbolic means or sign means were used, children with different levels of regulation learned with equal efficiency, but the level of regulation turned out to be critical when learning according to the most complex programme — using model tools.

**Conclusions.** The effectiveness of mastering the initial mathematical concepts in older preschoolers is primarily due to the nature of the learning content, which should ensure the rationality of children’s actions. However, the more complex this content is and the more complex symbolic means are used in teaching, the more requirements are placed on the level of development of children’s regulatory functions.

**Keywords:** initial mathematical representations, senior preschool age, regulatory functions, symbolic means, magnitude

**For citation:** Veraksa, A.N., Sidneva, A.N. (2024). Psychological Aspects of Introducing Older Preschoolers to Mathematics. *Lomonosov Pedagogical Education Journal*, 22(1), 130–160. <https://doi.org/10.55959/LPEJ-24-07>

## Введение

В последнее время как среди педагогов-практиков, так и среди исследователей наблюдается широкий интерес к тому, когда начинать обучение детей математике и как интересно и продуктивно вводить дошкольников в математическую действительность. На такое обучение существует большой запрос со стороны родителей, который порождает соответствующие предложения (математические кружки для детей раннего возраста, кружки по ментальной арифметике, интеллектуике, подготовке к школе и пр.). Такая популярность раннего математического обучения связана с тем фактом, что по результатам многочисленных исследований эффективность формирования математических понятий у учащихся дошкольных образовательных учреждений впоследствии напрямую связана с их академической успеваемостью (Jordan et al., 2009; Watts et al., 2014). Тем не менее зачастую в исследованиях математического развития дошкольника оцениваются параметры, которые рассматриваются либо как естественно возникающие способности ребенка — так называемое чувство числа, арифметические и пространственные способности и т.д. (Dehaene, 2011; Jordan, Kaplan, Oláh, Locuniak, 2006; Malykh et al., 2020), либо как отдельные навыки, которые можно натренировать (например, с помощью ментальной арифметики). Это может приводить к тому, что само введение ребенка в математическую реальность осуществляется формально, число и математические отношения воспринимаются детьми натурально, а не выступают особыми знаковыми средствами понимания и преобразования отношений величин конкретных предметов.

Опираясь на традиции психологического культурно-исторического и деятельностного подхода (Выготский, 1984; Леонтьев, 1960), мы считаем математические способности не заданными, а формирующимися в процессе присвоения культурных средств деятельности, причем такое присвоение должно учитывать как особенности организации деятельности ребенка при работе с математическим содержанием, так и его возрастные особенности — в первую очередь уровень развития знаково-символической функции и уровень развития регуляции. В данной работе описываются результаты формирующего эксперимента, основной целью которого была оценка вклада в результативность обучения начальным математическим представлениям трех факторов — содержания обучения, характера используемых знаково-символических средств и уровня развития регуляторных функций.

## **Содержание обучения как фактор усвоения начальных математических представлений старшими дошкольниками**

Проведенные в рамках деятельностного подхода (Давыдов, 2000; Обухова, 1972; Гальперин, Георгиев, 1960; Александрова, 2011 и др.) исследования показали, что наиболее психологически адекватно вводить ребенка в математическую действительность через обучение тем понятиям, которые «стоят» за понятием числа — в первую очередь понятию величины и отношения величин. Понимая, что любое число является результатом измерения какой-либо величины (длины, площади, объема, количества, массы и т.д.) соответствующей этой величине меркой, дети с самого начала знакомятся с сущностью числа, что в дальнейшем избавляет их от ошибок формализма знаний (сложения/вычитания разнокачественных величин, ошибок измерения и т.д.). С точки зрения деятельности наиболее адекватным действием, в котором формируется представление о величине, является действие подбора по величине, для которого детям должна предоставляться полная ориентировка и организована отработка всех ключевых характеристик действия (Гальперин, Георгиев, 1960). Эта полная ориентировка должна включать ориентировку и более конкретных операций — выбора посредника/мерки, отмеривание, фиксацию результата метками, и, наконец, собственно подбора на основе результата измерения объекта такой же величины. Возможность и эффективность овладения этим содержанием и операциями в старшем дошкольном возрасте показана в работах Л.Ф. Обуховой на материале формирования понятия сохранения величин (Обухова, 1972), в работах П.Я. Гальперина и Л.С. Георгиева (Гальперин, Георгиев, 1960) и В.В. Давыдова на материале формирования понятия числа (Давыдов, Горбов, 2010), и в наших предыдущих исследованиях (Veraksa et al., 2022).

Однако сам способ выполнения действия подбора по величине и его конкретные операции в исследованиях могут предлагаться детям в разных вариантах, и в первую очередь при использовании различных знаково-символических средств. Какую роль в процессе усвоения понятия величины играют эти средства?

### **Развитие знаково-символических средств в дошкольном возрасте**

Ключевую роль в освоении математических отношений именно в дошкольном возрасте играет знаково-символическая деятельность ребенка (Салмина, 1988), которая активно развивается

на протяжении всего дошкольного периода детства. Основным содержанием знаково-символической деятельности является использование знаково-символических средств, которые определяются как «особая форма выражения знаний и эмоций с акцентом на плане выражения» (Салмина, 1988). Быть знаком или символом – не естественное, а функциональное свойство предмета, в онтогенезе происходит формирование способности употреблять одни объекты для представления других. Среди знаково-символических средств рассматриваются такие как сигнал, знак, символ, изображение, метафора, модель, схема, понятие и др.

Исследованию развития знаково-символических средств в дошкольном возрасте посвящены многочисленные работы (Пиаже, 1969; Выготский, 1967; Венгер, 1986; Запорожец, 1986; Салмина, 1988; Сапогова, 1993; Кулагина, 2003; DeLoache, 2000; Burkitt et al., 2003 и др.). Общим для всех видов знаково-символической деятельности является одновременное удержание двух планов отражения: плана реального и воображаемого (Выготский, 1967; Запорожец, 1986 и др.), которое появляется уже к концу раннего возраста (DeLoache, et al., 1995) и получает дальнейшее развитие в различных видах деятельности дошкольника — прежде всего, в игре (Эльконин, 1989). Однако помимо игры, дошкольники активно занимаются и другими видами деятельности — рисованием, лепкой, аппликацией, конструированием и т.д. Анализ этих видов деятельности показывает, что в них всех есть одна общая особенность — их моделирующий характер (Венгер, 1986). Разыгрывая тот или иной сюжет в игре, дети моделируют взаимоотношения взрослых людей, а при помощи предметов, используемых в качестве игровых заместителей, создают модели, отображающие взаимосвязи реальных предметов (Эльконин, 1989). Аналогичным образом в продуктивных видах деятельности дети или отображают в рисунке какой-либо реальный сюжет, или строят из кубиков или наклеивают в аппликации реальный дом – все это различные типы моделей (Венгер, 1986). Одновременно старшие дошкольники познают действительность через волшебные сказки, истории и другие сюжеты, в которых в символической форме отображаются существенные отношения между людьми и предметами (Эльконинова, 1998).

В рамках данной работы мы будем говорить о тех видах знаково-символических средств, которые, с одной стороны, активно развиваются на протяжении дошкольного возраста, а с другой могут продемонстрировать определенные трансформации одно в другое в процессе познавательного (в частности, математического) развития ребенка.

Наиболее часто используемым в процессе обучения математике типом знаково-символических средств являются знаки. Понятие «знака» — ключевое для культурно-исторической теории Л.С. Выготского (Выготский, 1984). При этом за знаком всегда стоит значение, раскрытие этого значения учащимся и характеризует специфику школьного обучения. Знаки репрезентируют отображаемую ими реальность максимально абстрактно, что, к сожалению, может приводить к оперированию детьми знаками без понимания их значения. Значение знаков часто передается взрослыми детям напрямую, как некоторый культурно-заданный образец (вот это «3», а это «4», 3 меньше, а 4 больше и т.д.).

Отличительной чертой символа является образная сторона. Помимо того, что символ репрезентирует реальность, он зачастую «заменяет» собой реальность, позволяя в ситуации неопределенности первоначально действовать в пространстве этого символа (Веракса, 2014). Важной характеристикой символа является наличие в нем эмоционального компонента, отражающего отношение субъекта к ситуации неопределенности. Исследования показывают, что символическое опосредствование актуализируется в условиях субъективного дефицита знаковых средств, необходимых для решения задачи (Веракса, 2014). Различные символические сказочные или игровые образы и сюжеты, в рамках которых воспроизводятся смыслы математических отношений (ближе — дальше, выше — ниже, раздай поровну и др.), возникают, как правило, в рамках сюжетно-ролевых игр и слушания и обыгрывания сказок и волшебных историй, в которых символически воспроизводятся отношения мира взрослых (Эльконин, 1989; Эльконинова, 1998).

Модель является знаковой формой, которая отображает существенные отношения в чистом виде (Венгер, 1986; Давыдов, Вардянян, 1981; Поддьяков, 1977; Эльконин, 1997). Формирование наиболее ранней формы моделирования — наглядного моделирования (Венгер, 1986) включает в себя овладение действиями замещения, построения моделей путем придания заместителям отношений, отображающих отношения замещаемых объектов, и использования этих моделей для решения основной задачи. Эта группа средств тесно связана с важными для дошкольника продуктивными видами деятельности — конструированием и изобразительной деятельностью. Рисунок дошкольника является наглядной моделью изображаемого объекта или ситуации. Лепка, аппликация, работа с конструктором точно так же создают и задают необходимость как можно более точно моделировать относительные величины воспроизводимых объектов.

В этих естественных для дошкольников видах деятельности осваиваются основные математические величины (длина/ширина/высота, площадь, объем), формируется ориентировка в пространстве и представление о геометрических формах, ориентировка во времени (планирование «что за чем» и пр.), счет.

Исследования показывают, что развитие знаково-символической деятельности в дошкольном возрасте происходит у разных детей неравномерно (Венгер, 1986; Сапогова, 1993; Веракса, 2014), что может влиять и на особенности формирования начальных математических представлений у таких детей.

### **Развитие регуляторных функций в дошкольном возрасте**

Другой тип познавательных процессов, которые показывают связь с математической успешностью в дошкольном возрасте, — это регуляторные, или исполнительные, функции (Miyake, et al., 2000), которые обеспечивают целенаправленное решение проблем и адаптивное поведение в новых ситуациях (Diamond, 2012). Исполнительные функции включают 3 компонента: 1) рабочая память (визуальная и вербальная); 2) когнитивная гибкость (фокусировка внимания и/или переключение внимания в условиях меняющихся условий); 3) сдерживающий контроль (способность подавлять импульсивную реакцию). Исследования показывают, что регуляторные функции предсказывают будущую успеваемость дошкольников (Duncan, et al., 2007) и взаимосвязаны с математическими способностями (Jarvis, Gathercole, 2003; Bull, Scerif, 2001; Clements et al., 2016). Так, например, сдерживающий контроль наряду с когнитивной гибкостью у детей дошкольного возраста являются предикторами математических способностей в более старшем возрасте (Best, et al., 2011; Espy, et al., 2004), а низкий уровень регуляторных функций связан с трудностями в освоении математических концепций (Swanson, Sachse-Lee, 2001).

### **Методы исследования**

Целью данного исследования являлся анализ сравнительной эффективности разных типов знаково-символического опосредования при формировании начальных математических представлений у старших дошкольников с разным уровнем развития регуляторных функций.

Исследование состояло из трех этапов. На первом этапе была проведена диагностика регуляторных функций дошкольников с помощью субтестов NEPSY-II (Korkman et al., 2007; Веракса и др., 2020)

и теста «Сортировка карт по изменяемому признаку» (Zelazo, 2006). Диагностика регуляторных функций была проведена индивидуально с каждым ребенком. После оценки регуляторных функций дети были разделены на три подгруппы по уровням развития регуляторных функций (низкий, средний, высокий) в соответствии с результатами кластерного анализа (кластеризация К-средних) в Jamovi 1.6.23.0. Также перед началом формирующих занятий у всех детей также был проведен пре-тест математических представлений с использованием авторского диагностического инструментария в мини-группах по 3–4 ребенка.

На втором этапе участники из каждой подгруппы с низким, средним и высоким уровнями регуляторных функций были случайным образом распределены по трем экспериментальным и одной контрольной группам так, чтобы соотношение участников в группах было равномерным (Таблица 1). В рамках каждой из трех экспериментальных групп было проведено 15 формирующих занятий продолжительностью 15–20 минут (в мини-группах по 4–5 детей). Занятия проходили 2 раза в неделю в кабинетах для дополнительных занятий, находившихся при детских садах. Контрольная группа никаких специальных занятий не посещала. Занятия были завершены во всех экспериментальных группах одновременно.

Таблица 1

**Анализ распределения учащихся с разным уровнем регуляторных функций на группы формирующего эксперимента**

		Уровень регуляции			Всего
		Низкий	Средний	Высокий	
Традиционный подход (знаки)	Количество	10	11	9	30
	%	33,3	36,7	30	100,0
Символический подход (символы)	Количество	10	11	10	31
	%	32,5	35	32,5	100,0
Моделирующий подход (модели)	Количество	11	8	9	28
	%	39,3	28,6	32,1	100,0
Контрольная группа	Количество	11	9	9	29
	%	37,9,0	31	31	100,0
Всего	Количество	42	39	37	118
	%	35,6	33,1	31,4	100,0

(Хи квадрат Пирсона = 0,704,  $p = 0,994$ )

**Table 1**  
**Analysis of the distribution of students with different levels of regulatory functions into groups of the formative experiment**

	Low	Level of regulation			Total
		Medium	High		
The traditional approach (signs)	N	10	11	9	30
	%	33.3	36.7	30	100.0
Symbolic approach (symbols)	N	10	11	10	31
	%	32.5	35	32.5	100.0
Modeling approach (models)	N	11	8	9	28
	%	39.3	28.6	32.1	100.0
Control group	N	11	9	9	29
	%	37.9.0	31	31	100.0
Total	N	42	39	37	118
	%	35.6	33.1	31.4	100.0

(Pearson Chi squared = 0.704, p = 0.994)

На третьем этапе был проведен пост-тест математических представлений, аналогичный начальной диагностике в экспериментальных и контрольной группах.

Экспериментальные и контрольная группы не отличались друг от друга по начальному уровню развития математических умений и представлений детей (ANOVA,  $F(3) = 0,524$ ;  $p = 0,666$ ,  $n^2 = 0,012$ ), что является обязательным условием для правильной интерпретации результатов формирования.

### *Методы оценки уровня регуляторных функций*

Для измерения регуляторных функций у учащихся использовались субтесты NEPSY-II (Korkman et al., 2007).

Для оценки зрительной рабочей памяти использовался субтест «Memory for Designs», направленный на запоминание картинок и их расположения. Для оценки вербальной рабочей памяти был использован субтест «Sentence Repetition», в котором необходимо было повторять предложения, постепенно усложняющиеся лексически и грамматически.

Оценка скорости обработки информации и торможения импульсивных реакций осуществлялась при помощи субтеста «Naming and

Inhibition». Субтест «Statue» был использован для оценки физического сдерживающего контроля, торможения.

Для оценки когнитивной гибкости использовался тест «The Dimensional Change Card Sort» на сортировку карт по изменяемому критерию (Zelazo, 2006).

Для оценки функций планирования и контроля, а также визуально-пространственной ориентации была проведена методика «Схематизация» (Л.А.Венгер).

### ***Методы оценки математических представлений***

Была разработана методика диагностики уровня сформированности математических представлений о величинах у детей старшего дошкольного возраста. Данный диагностический инструментарий включал три блока в соответствии с изучаемыми величинами: длина, площадь, объем. В каждом блоке детям предлагалось по шесть типов заданий, соответствующих типам формируемых действий:

1. *Подбор и сравнение.* Задания на умение сравнивать объекты, подбирать одинаковые по величине. Например, найти такую же по длине полоску, как образец из нарисованных, задания на сохранение величин и т.д.

2. *Измерение.* Задания на измерение величин (например, сколько раз условная мера уместилась в ширине объекта).

3. *Использование меры.* Задания на умение правильно использовать условные меры. В качестве критериев правильного использования мерки были выделены следующие: отсутствие пространства между мерками или их наложения, использование одинаковых условных мер по заданному признаку, аккуратное и полное измерение величины.

4. *Соотношение величины, меры и числа.* Задания на понимание связи между числом и используемой меркой: чем меньше мерка, тем больше раз она вместится в величину.

5. *Условность единиц измерения и счета.* Задания на понимание единиц измерения и счета, когда в качестве условной меры выступает сложная мерка, состоящая, например, из двух или трех палочек.

Дополнительно детям предлагались усложненные задания на сравнение и измерение величин, где внешние, визуальные признаки явно доминируют над существенными.

В диагностику также вошли задания на понимание количества. Они были представлены задачами на комплектование (например, «что останется лишним, если собирать велосипеды из 1 рамы и 2 колес?»). Понятие количества напрямую не формировалось в рамках эксперимента, поэтому задания на комплектование позволяли выявить зону ближайшего развития ребенка. Оценка данных заданий зависела от меры помощи, которую ребенок получал от тестера: 2 балла ребенок получал, если самостоятельно решил задание верно; 1 балл — если он решил задание правильно после подсказки тестера; 0 баллов ребенок получал, если задание было не решено и решено не верно даже после подсказки тестера.

Всего за диагностику ребенок мог набрать 38 баллов: по 10 баллов за блоки «длина», «площадь», «объем», 4 балла за задания на зону ближайшего развития и 4 балла за усложненные задания.

### ***Описание формирующих занятий***

В каждой программе вводилось и отрабатывалось понятие величины, в частности, такие величины, как длина, площадь и объем. В общем случае понятие величины вводилось через действие подбора по величине, когда от ребенка требовалось среди заданных объектов найти объект, такой же по длине, площади или объему, как объект-образец. Важно, что возможность непосредственного сравнения объекта-образца с заданными объектами по заданной характеристике у детей отсутствовала, но в качестве помощника предлагался предмет-посредник (для длины — клубок ниток, для площади — фигуры типа танграма, которыми можно было выложить площадь любой фигуры, для объема — специальная емкость). На первом этапе формирующего эксперимента вводился и отрабатывался способ выполнения действия подбора по величине в ситуации, когда мерка совпадает с величиной: детям необходимо было, используя посредник, «отмерять» нужную величину у объекта-образца и найти такую же среди заданных объектов. На втором этапе формирующего эксперимента вводился и отрабатывался способ выполнения действия подбора по величине в ситуации, когда мерка существенно меньше исходной величины. Здесь уже возникала необходимость усложнения способа: а) измерения того, сколько раз мерка «поместится» в исходную величину, б) фиксации результата измерения метками или числом, в) измерение при помощи мерки каждого из заданных объектов с целью выяснения, в каком из них результат измерения совпадает с результатом измерения исходной величины. На третьем этапе давались

различные задания на соотнесение величины и мерки (чем меньше мерка, тем больше раз она вместится в величину, и чем больше мерка, тем меньше раз она поместится в величину), это делалось с целью формирования разумности и обобщенности действий.

Были разработаны три варианта формирующих программ, одинаковые с точки зрения содержания — формируемых понятий и действий, но разные с точки зрения используемых в них знаково-символических средств. Эти средства характеризовали как предметную ситуацию задач (что за объекты заданы в условии задачи и что с ними нужно сделать), так способ решения (как это сделать), которому обучали. Опишем их подробнее.

*Знаковые средства.* В первой программе, названной нами «традиционной», как предметная ситуация задач, так и предлагавшийся способ решения носили знаковый характер. Типичные формулировки задач и способов здесь звучали так: «найди такую же», «надо приложить», «отрезать», «отмерять», «записать» и т.д. По сути, это были абстрактные формулировки, которые не несли никакого эмоционального отношения к ситуации. Пример постановки задачи в рамках этой программы можно увидеть ниже.

---

### **Пример занятия со знаковыми средствами.**

#### **«Традиционная» программа**

**Задача.** Найти прямоугольник такой же длины не перемещая прямоугольники со стола на стол.

На первом столе лежат 5–7 *прямоугольников разной длины и цвета, одинаковой ширины 1 см.* На втором столе *еще один прямоугольник, совпадающий с одним из тех, что на первом столе, по длине, но другого цвета.*

П: У меня есть прямоугольники. На первом столе (показывает) и на другом. Эти прямоугольники нельзя переносить со стола на стол. А мне нужен точно такой же, как этот (показывает на прямоугольник на втором столе) **по длине**. Как мне выбрать точно такой же по длине?

Дети, возможно, предложат приложить.

П: Помните, что нам нельзя перекладывать прямоугольники с одного стола на другой. Но у нас есть помощник: вот этот *шнурок*.

П: Смотрите, как можно сделать!

Педагог достает шнурок, прикладывает его к длине прямоугольника, расправляя его полностью. Прикладывает так, чтобы один конец совпадал, а второй конец отрезает. Все действия проговариваются (прикладываю к началу, распрямляю, отмечаю, где длина заканчивается, и отрезаю).

П: Теперь мы сделали шнурок нужной нам длины. Давайте теперь найдем подходящий прямоугольник. Для этого будем прикладывать шнурок к прямоугольникам и определять, где такой же по длине.

Педагог показывает, как найти нужный прямоугольник. А затем все вместе проверяют, одинаковой длины ли получились прямоугольники, прикладывая их друг другу по длине.

П: Итак, давайте подведем итог — если мы не можем приложить предметы, мы можем воспользоваться помощником (например, шнурком) и на нем обозначить нужную нам длину.

---

*Символические средства.* Во второй программе, названной нами «символической», как предметная ситуация задач, так и предлагавшийся способ решения носили символический характер. Типичные формулировки задач и способов здесь звучали так: «Злая Колдунья украла футляр для волшебной палочки — помоги Волшебнику его найти!», «Вот тебе волшебный клубочек, он поможет померить, подойдет ли футляр», «Золушке нужно сюда насыпать столько же риса, как в банке у Мачехи, иначе она не успеет на бал!» и т.д. По сути, это были символические ситуации, для разрешения которых предлагались символические средства, все эти ситуации и средства вызывали эмоциональное отношение детей. Пример занятия можно увидеть ниже.

---

### **Пример занятия с символическими средствами.**

#### **«Символическая» программа**

**Задача: найти футляр, подходящий по длине для волшебной палочки.**

П: Мы сейчас с вами находимся в волшебном городе. Как вы думаете, кто здесь может жить?

Да, здесь живут феи, эльфы, гномы и, конечно, волшебники. У каждого волшебника есть своя волшебная палочка. И чтобы

палочки не разряжались, их на ночь кладут в специальные футляры. Как телефоны на зарядку.

Но в городе есть не только добрые волшебники, но и злые. Представляете, злая колдунья украла футляр от палочки моего знакомого волшебника. Он очень расстроен и плачет, потому что его палочка не работает. Поможем ему?

П: Колдунья спросила: «Кто самый смелый? Кто сможет прийти в мою пещеру без волшебной палочки и с первого раза найти нужный футляр? А если вы не справитесь, то волшебник навсегда останется без палочки».

П: Давайте подумаем, что мы можем сделать. В футляр палочка должна помещаться идеально. Она не должна быть короче или длиннее, иначе она не зарядится.

Как же найти нужный футляр? (ответы детей)

П: Знаете, ко мне тут прибежал волшебный клубочек.

Клубочек: Я могу вам помочь! Могу стать таким же, как палочка. А еще от меня можно отрезать кусочек.

Как он может таким стать? (спросить детей + сказать, что если что клубочек можно отрезать). Чем нам может помочь клубочек?

Если дети не догадываются, то помогаем сделать длину клубочка как палочки. Затем выбираем смельчака, который пойдет в пещеру и найдет нужный футляр. (Заранее проговорить, что делать в пещере, чтобы не ошибиться.)

С помощью клубочка отмериваем нужную длину палочки и потом находим нужный футляр.

---

*Модельные средства.* В третьей программе, названной нами «моделирующей», как предметная ситуация задач, так и предлагавшийся способ решения моделировали реальные ситуации. Предметные ситуации задач можно рассмотреть как модели реальных бытовых или конструкторских ситуаций («подбери подходящую колонну к зданию», «какой плиткой можно уложить пол в ванной»), при этом мы исходили из характера игровой деятельности как направленной на такое моделирование, отыгрывание ролей реальных взрослых, занимающихся конструированием. В способы решения таких задач

мы также включили специальную работу с моделью, то есть задача сначала решалась на схемах и чертежах, и лишь затем решение переносилось на исходную задачу. Это обосновывалось тем, что, например, реальные объекты слишком тяжелые, большие или хрупкие, или нужно выполнить действие с первого раза, чтобы не переделывать ремонт и др., и тогда задачу можно решить при помощи построения модели реальных объектов (схема, чертеж). В этой связи в моделирующей программе появилось новое действие, которое не осваивалось в других — построение реального объекта исходя из знания соотношения размера модели и этого объекта. Так, например, детям нужно было найти ступеньку к реальной веревочной лестнице нужной длины, когда было известно, что реальная лестница в три раза больше той, которая на чертеже. Решая эту задачу сначала на чертеже, дети подбирали нужную ступеньку, а затем, зная, что реальная ступень в три раза больше, откладывали три раза длину ступени на чертеже и получали искомое. Таким образом, у детей могло появиться представление о масштабе. Пример занятия можно увидеть ниже.

---

**Пример занятия с модельными средствами.  
«Моделирующая» программа**

**Задача: найти веревку, которая может служить ступенькой для веревочной лестницы.**

П: Знаете ли вы, кто такие инженеры? Это люди, которые занимаются придумыванием и изготовлением самых разных вещей. Например, они могут придумать, как построить мост, или автомобиль, или ракету.

П: Как вы думаете, они сразу начинают строить мост, самолет, ракету? Нет! На самом деле сначала инженеры делают чертежи того, что они собираются построить, и только потом строят. Например, если они захотят сделать мост через реку, то сначала они делают чертеж моста.

П: Как вы думаете, что больше — мост или его чертеж по своим размерам. Кто может сказать? Конечно, чертеж гораздо меньше моста.

П. Сегодня мы с вами будем инженерами. У нас есть вот такая лестница (показывает большую веревочную лестницу, в которой не хватает одной ступеньки, лестница подвешена, и перемещать ее нельзя). Но одна ступенька у лестницы оторвалась. Нам нужно прийти в магазин и найти веревку, подходящую к лестнице (на другом

столе лежат несколько разной длины и цвета веревок). И рядом лежит свернутая в клубок большая тяжелая измерительная веревка (она тяжелая, и прикладывать ее всю невозможно).

П: Поскольку мы с вами сегодня инженеры, то у нас есть чертеж лестницы (показывает распечатку с лестницей и линиями разной длины, одна из них подходящая). Известно, что на чертеже лестница в два раза меньше, чем вот эта реальная. Давайте решим сначала эту задачу на чертеже.

П: Как вы думаете, можем ли мы как-то узнать, какая из линий нам подойдет? Ведь приложить мы ее не можем. Правда, у меня есть помощник — клубок ниток, может, он нам поможет.

П: Эту нитку можно прикладывать к чертежу лестницы (показывает разные способы), а еще ее можно разрезать. Может, у вас есть идеи, как она нам может помочь?

*Если дети не догадываются, то педагог предлагает отрезать нитку такой же длины, как ступенька, и прикладывать ее по очереди к каждой из линий, пока не найдется нужная.*

П.: А как теперь найти реальную ступеньку? Помните, во сколько раз лестница больше? Да, в два раза. Значит, и ступенька должна быть больше ровно в два раза, чем та, которая на чертеже. А мы ее как раз уже измерили (показывает отрезанную нитку) — вот такая у нее длина. Нам нужно сделать в два раза больше измерительную веревку.

*Прикладывают нитку два раза к измерительной веревке и отрезают от этой веревки. Затем прикладывают ее по очереди к каждой веревке на столе, пока не найдут нужную. Проверяют, подойдет ли к веревочной лестнице найденная ступенька.*

---

## **Выборка**

В исследовании приняло участие 133 дошкольника 6–7 лет (70 мальчиков и 63 девочки, различий между мальчиками и девочками по исследуемым параметрам не обнаружено, Т-критерий  $(113) = 0,2$ ;  $p = 0,842$ ). Все дети посещали государственные детские сады в районах Москвы, характеризующиеся одинаковым уровнем инфраструктуры и рассчитанные в первую очередь на семьи со средним доходом. Родители всех детей, принимавших участие в исследовании, дали письменное согласие.

С целью оценки эффективности формирующих занятий был проведен непараметрический статистический анализ итоговых баллов пре- и пост-тестов для экспериментальных и контрольной групп. Сравнение показало значимые различия по общему баллу диагностики математических умений между результатами пре-теста и пост-теста, пре-теста и отложенного пост-теста (Z-критерий Вилкоксона,  $p < 0,05$ ). Значимых различий между пост-тестом и отсроченным пост-тестом не выявлено (Z-критерий Вилкоксона,  $p > 0,05$ ), что может говорить о некоторой устойчивости результатов формирующих занятий (Z-критерий Вилкоксона,  $p < 0,05$ ).

Описательные статистики итогового балла тестирований для экспериментальных групп и контрольной приведены в Таблице 2.

Таблица 2

Описательные статистики итогового балла тестирований для экспериментальных групп и контрольной

		М	SD	Min	Max
Экспериментальные группы	Пре-тест	12,74	5,3	2	27
	Пост-тест	19,15	5	7,5	29
	Отсроченный пост-тест	18,04	6,47	4,5	27,50
Контрольная группа	Пре-тест	13,4	6,2	2	25,5
	Пост-тест	15,6	7,3	2	29
	Отсроченный пост-тест	17,4	6,4	7	27

Table 2

Descriptive statistics of the final test score for the experimental groups and the control group

		M	SD	Min	Max
Experimental groups	Pre-test	12.74	5.3	2	27
	Post-test	19.15	5	7.5	29
	Delayed post-test	18.04	6.47	4.5	27.50
Control group	Pre-test	13.4	6.2	2	25.5
	Post-test	15.6	7.3	2	29
	Delayed post-test	17.4	6.4	7	27

С целью оценки эффективности конкретных знаково-символических средств обучения мы сравнивали прирост итогового балла в пост-тесте для каждой из программ. Было обнаружено, что тип программы действительно оказывает влияние на прирост общего балла диагностики математических представлений и умений (ANOVA с непараметрической поправкой Уэлча,  $p < 0,05$  при равенстве дисперсий, критерий Ливиня,  $p > 0,05$ , Рисунок 1).

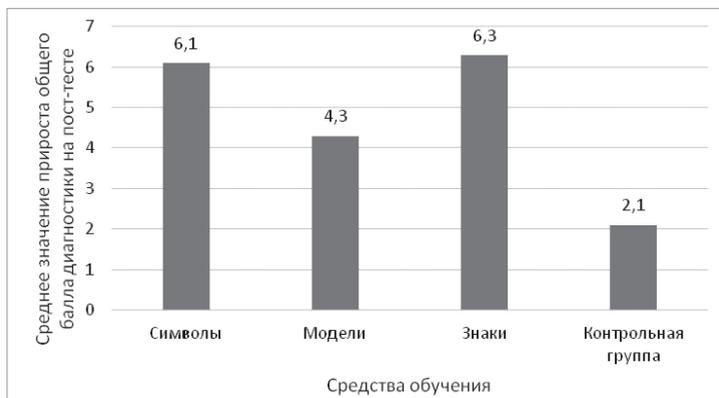


Рисунок 1

Прирост средних значений общего балла диагностики на пост-тесте для различных средств обучения

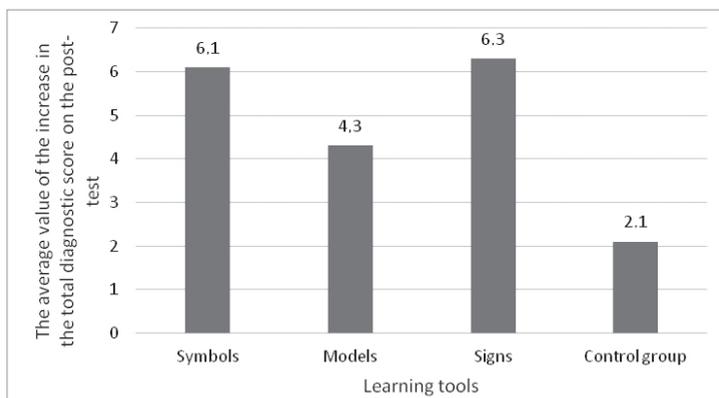


Figure 1

The increase in the average values of the total diagnostic score on the post-test for various learning tools

Обнаружены значимые различия между приростом математических умений детей, обучавшихся с использованием только знаковых средств («традиционная» программа), с приростом математических умений детей из контрольной группы (Post Hoc,  $F = 2,27$ ,  $p = 0,01$ ). Аналогично прирост у детей, которых обучали с помощью символических средств, значимо выше прироста детей из контрольной группы (Post Hoc,  $F = 3,38$ ,  $p < 0,001$ ). А вот значимых отличий в приросте у детей, которые обучались с помощью моделей, от прироста в контрольной группе обнаружено не было.

Мы также обнаружили факт неравномерного прироста общего балла у детей с разным уровнем регуляции. Если для контрольной группы мы увидели линейную зависимость прироста от уровня развития регуляции, то для экспериментальных групп ситуация существенно отличалась. Было обнаружено значимое взаимодействие типа используемых средств и уровня регуляторных функций (ANOVA для прироста баллов,  $F(6) = 1,89$ ,  $p = 0,049$ ,  $n^2 = 0,072$ ).

Уровень регуляции является «критичным» только при работе в самой сложной из наших программ – моделирующей. В группах, где использовались средства-символы или средства-знаки, дети с разным уровнем регуляции не показали никаких различий по исследуемым параметрам диагностики (критерий Уэлча,  $p > 0,05$ , см. Таблицу 3).

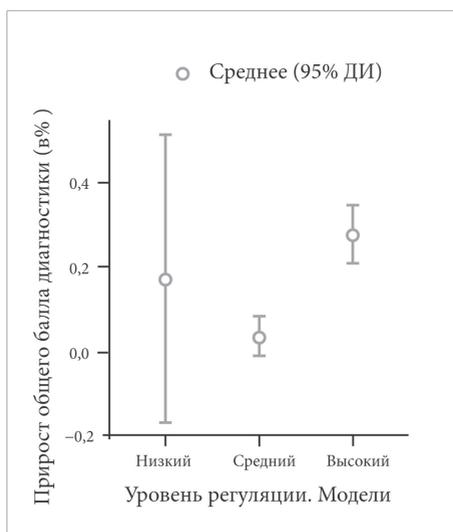
Таблица 3

Описательные статистики процента прироста общего балла на итоговой диагностике для различных средств обучения и уровней регуляции

Средства обучения	Уровень регуляции	Процент прироста общего балла диагностики ( $M \pm SD$ )
Символы	Низкий	21,4 % $\pm$ 9,8%
	Средний	16 % $\pm$ 5,16%
	Высокий	17,7 % $\pm$ 11,2%
Модели	Низкий	17,2 % $\pm$ 27,3%
	Средний	3,6 % $\pm$ 6,3%
	Высокий	27,7 % $\pm$ 6,4%
Знаки	Низкий	20,2 % $\pm$ 12,5%
	Средний	17,5 % $\pm$ 11,7%
	Высокий	23,1 % $\pm$ 13,7%
Контрольная группа	Низкий	2 % $\pm$ 6,8%
	Средний	8,2 % $\pm$ 12,8%
	Высокий	16 % $\pm$ 11,3%

**Table 3**  
**Descriptive statistics of the percentage increase in the total score on the final diagnosis for various learning tools and levels of regulation**

Means	Level of regulation	Percentage increase in the overall diagnostic score (M±SD)
Symbols	Low	21.4 % ± 9.8%
	Medium	16 % ± 5.16%
	High	17.7 % ± 11.2%
Models	Low	17.2 % ± 27.3%
	Medium	3.6 % ± 6.3%
	High	27.7 % ± 6.4%
Signs	Low	20.2 % ± 12.5%
	Medium	17.5 % ± 11.7%
	High	23.1 % ± 13.7%
Control group	Low	2 % ± 6.8%
	Medium	8.2 % ± 12.8%
	High	16 % ± 113%



**Рисунок 2**  
 Доверительные интервалы среднего процента прироста общего балла на посттесте при обучении с помощью средств-моделей для детей с разным уровнем развития регуляции

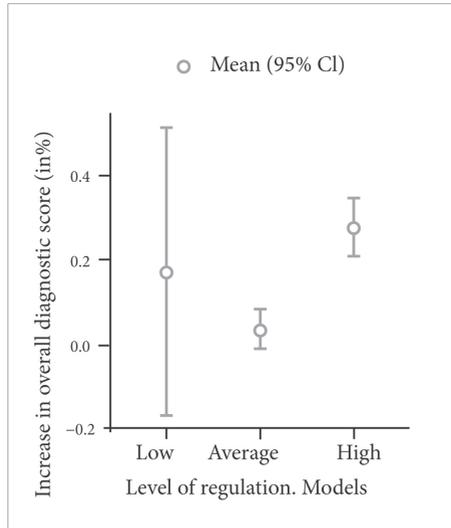


Figure 2

**Confidence intervals of the average percentage increase in the total score on the post-test when learning using modeling tools for children with different levels of regulation**

В моделирующей программе дети с высоким уровнем регуляции показали в первую очередь более высокий прирост по общему баллу диагностики, чем дети со средним уровнем регуляции (критерий Уэлча,  $F(2) = 23,67$ ;  $p < 0,001$ ; Post Hoc,  $p_{Tukey} = 0,014$ ). При этом у детей с низким уровнем регуляции был обнаружен большой разброс результатов, что может свидетельствовать о неравномерности усвоения этой группой понятий и действий (Рисунок 2).

Более конкретно, в моделирующей программе были обнаружены значимые различия между «высокой» и «средней» группой в эффективности усвоения для понятия площади (критерий Уэлча,  $F(2) = 7,69$ ;  $p = 0,011$ ; Post Hoc  $p_{Tukey} = 0,014$ ), действий измерения величин (критерий Уэлча,  $F(2) = 9,16$ ;  $p = 0,008$ ; Post Hoc  $p_{Tukey} = 0,023$ ), комплектования (критерий Уэлча,  $F(2) = 3,71$ ,  $p = 0,059$ ; Post Hoc  $p_{Tukey} = 0,038$ ), установления зависимости числа от мерки (критерий Уэлча,  $F(2) = 4,5$ ;  $p = 0,038$ ; Post Hoc  $p_{Tukey} = 0,025$ ).

Таким образом, самый низкий эффект обучения был показан в программе, в которой использовались средства-модели. И именно

в усвоение по этой программе, как показывают результаты, наибольший вклад внесли регуляторные способности детей.

### **Обсуждение результатов**

Полученные данные позволяют сделать следующие выводы. Судя по результатам проведенного исследования, содержание программ обучения играет принципиальную роль в формировании начальных математических представлений. Как знаковый, так и символический типы опосредования показали равную эффективность, что можно объяснить тем, что, независимо от типа опосредования, в программу «заложены» адекватные действия детей — подбор по величине и ее измерение.

Этот результат является тем не менее относительно неожиданным, поскольку мы предполагали, что символическое опосредование позволит более эффективно осваивать представления о величинах, поскольку соответствует психологическим особенностям детей 6–7-летнего возраста. Такой результат можно объяснить тем, что, возможно, дети, участвующие в исследовании, уже находятся на таком уровне знаково-символического опосредования, что для них нет необходимости создавать именно сказочные ситуации. Отчасти это подтверждается нашими предыдущими исследованиями, в которых наибольшая эффективность символического подхода была обнаружена для детей с самыми низкими уровнями развития регуляторных способностей (Veraksa et al., 2022).

В нашем исследовании наиболее низкую эффективность показала программа, в которой основным средством были модели. Это связано, по-видимому, с тем, что в данной программе в предлагаемые детям способы решения задач была включена отдельная, специальная работа с моделью, то есть задача сначала решалась на схемах и чертежах, и лишь затем решение переносилось на исходную задачу. Операции, входившие в состав такого переноса, можно считать отдельными действиями, освоение которых специально не отрабатывалось. Однако исследования показывают, что такая работа по освоению моделирования многим детям нужна и для нее могут быть использованы специальные пособия (Цукерман, Поливанова, 2011). По-видимому, программа, в которой использовались модели, предъявляет более высокие требования к способностям детей — в первую очередь регуляторным умениям. Видимо, чем сложнее программа, тем больший вклад вносят когнитивные различия детей, тем большую дополнительную «работу» детям приходится проводить. Это

согласуется с идеями П.Я. Гальперина, который специально указывал на то, что индивидуальные различия являются ключевым фактором лишь при традиционном содержании обучения, когда ученикам дается неполная ориентировочная основа, которую каждому ребенку приходится достраивать самостоятельно (Гальперин, 1966). В пользу такого вывода свидетельствует и тот факт, что для контрольной группы мы увидели линейную зависимость прироста в уровне формирования элементарных математических представлений от уровня развития регуляции — чем выше регуляция, тем эффективнее ребенок достраивает то, что ему не дается.

В целом проведенное исследование показывает необходимость дальнейшего изучения роли содержания обучения, рассматриваемого как система психологически адекватных усваиваемым представлениям действий, в эффективности усвоения в сочетании с характером знаково-символического опосредования этих действий. Это позволит сблизить два уже сформировавшихся в отечественной культурно-исторической психологии относительно независимых теоретических подхода, в первом из которых изучается структура, функции и генез разных типов средств в старшем дошкольном и младшем школьном возрасте (Венгер, 1983; Поддьяков, 1977; Веракса, Веракса, 2012; Веракса, 2014 и др.), а во втором подчеркивается принципиальный характер содержания выполняемых действий для введения детей в новую для них реальность — математическую, лингвистическую и т.д. (Эльконин, 1989; Давыдов, 1962; Обухова, 1972; Талызина, 2020). В рамках наших исследований мы придерживаемся позиции, согласно которой специально организованное обучение детей 6–7 лет (в частности, математике) не только возможно, но и необходимо, поскольку позволяет через специальную пропедевтику числа, счета и измерения ввести ребенка в математическую реальность, что имеет огромное значение для профилактики «натурального» и в целом формального отношения к числам и величинам уже в начальной школе. Однако такое обучение должно быть организовано с учетом уровня развития знаково-символических средств у этих детей.

### **Заключение**

Проведенное исследование показало, что содержание обучения (формируемые представления и действия детей) играет более важную роль в усвоении начальных математических представлений, чем тип опосредования этих действий и уровень развития регуляторных функций детей. Однако чем сложнее предоставляемые детям

средства, тем больший вклад в эффективность формирования вносят индивидуальные различия, в частности различия в регуляции. Эти результаты ставят вопрос о необходимости более детального анализа характер взаимосвязи регуляторных функций с уровнем развития математических представлений в старшем дошкольном возрасте, учитывающего особенности формирования этих представлений.

### Список литературы

Александрова, Э.И. (2011). Математика. В Сборнике примерных программ для начальной общеобразовательной школы. Под ред. А.Б. Воронцова. Москва: Вита-пресс.

Венгер, Л.А. (1983). Овладение опосредствованным решением познавательных задач и развитие когнитивных способностей ребенка. *Вопросы психологии*, (2), 43–50.

Венгер, Л.А. (1986). Развитие познавательных способностей в процессе дошкольного воспитания. Москва: Педагогика.

Веракса, А.Н. (2014). Символическое опосредствование в познавательной деятельности дошкольников и младших школьников: дисс. докт. психол. наук. Москва

Веракса, А.Н., Алмазова, О.В., Бухаленкова, Д.А. (2020). Диагностика регуляторных функций в старшем дошкольном возрасте: батарея методик. *Психологический журнал*, 6(41), 108–118.

Веракса, Н.Е., Веракса, А.Н. (2012). Познавательное развитие в дошкольном детстве. Москва: Мозаика-Синтез.

Выготский, Л.С. (1967). Воображение и творчество в детском возрасте. Москва: Просвещение.

Выготский, Л.С. (1984). Собрание сочинений в 6 т.: Т. 4: Детская психология. Москва.

Гальперин, П.Я. (1966). Психология мышления и учение о поэтапном формировании умственных действий. В кн. Исследование мышления в советской психологии. Под ред. Е.В. Щороховой. Москва: Наука.

Гальперин, П.Я., Георгиев, Л.С. (1960). К вопросу о формировании начальных математических понятий. Сообщение 1–V. Доклады академии педагогических наук РСФСР, (1), 34–39

Давыдов, В.В. (1962). Анализ строения счета как предпосылка построения программы по арифметике. Вопросы психологии учебной деятельности младших школьников. Под ред. Д. Б. Эльконина, В. В. Давыдова. Москва: Изд-во Акад. пед. наук РСФСР.

Давыдов, В.В. (2000). Виды обобщения в обучении. Москва: Педагогическое общество России.

Давыдов, В.В., Варданын, А.У. (1981). Учебная деятельность и моделирование. Москва.

Давыдов, В.В., Горбов, С.Ф., Микулина, Г.Г., Савельева, О.В. (2011). Математика. В Сборнике примерных программ для начальной общеобразовательной школы. Под ред. А.Б. Воронцова (с. 278–289). Москва: ВИТА-ПРЕСС

Запорожец, А.В. (1986). Избранные психологические труды: В 2-х т. Т.1. Психическое развитие ребенка. Москва: Педагогика.

Кулагина, Н.В. (2003). Символ как средство мировосприятия и миропонимания: дисс. канд. философ. наук. Москва.

Леонтьев, А.Н. (1960). О формировании способностей. *Вопросы психологии*, (1), 13–21.

Обухова, Л.Ф. (1972). Этапы развития детского мышления. Москва: Изд-во Московского университета.

Пиаже, Ж. (1969). Избранные психологические труды. Психология интеллекта. Генезис числа у ребенка. Логика и психология. Москва: Просвещение.

Поддьяков, Н.Н. (1977). Мышление дошкольника. Москва: Издательство «Педагогика».

Салмина, Н.Г. (1988). Знак и символ в обучении. Москва: Изд-во Московского университета.

Сапогова, Е.Е. (1993). Ребенок и знак. Психологический анализ знаково-символической деятельности дошкольника. Тула: Приокское книжное изд-во.

Талызина, Н.Ф. (2020). *Деятельностная теория учения*. Москва: Изд-во Московского университета.

Цукерман, Г.А., Поливанова, К.Н. (2011). *Введение в школьную жизнь. Программа адаптации детей к школьной жизни*. Москва: Московский центр качества образования.

Эльконин, Б.Д. (1997). Особенности знакового опосредования при решении творческих задач. *Психологическая наука и образование*, (3), 55–61

Эльконин, Д.Б. (1989). Избранные психологические труды. Москва: Педагогика.

Эльconiнова, Л.И., Бажанова, Т.В. (2007). Форма и материал сюжетно-ролевой игры дошкольников. *Культурно-историческая психология*, 2(3), 2–11.

Best, J.R., Miller, P.H., Naglieri, J.A. (2011). Relations between executive function and academic achievement from ages 5 to 17 in a large, representative national sample. *Learning and Individual Differences*, 21(4), 327–336. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2011.01.007>

Bull, R., Scerif, G. (2001). Executive functioning as a predictor of children's mathematics ability: Inhibition, switching, and working memory. *Developmental Neuropsychology*, 19(3), 273–293. [https://doi.org/10.1207/S15326942DN1903\\_3](https://doi.org/10.1207/S15326942DN1903_3)

Burkitt, E., Barrett, M., Davis, A. (2003). Children's colour choices for completing drawings of affectively characterized topics. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 44(3), 445–455. <https://doi.org/10.1111/1469-7610.00134>

Clements, D.H., Sarama, J., Germeroth, C. (2016). Learning executive function and early mathematics: Directions of causal relations. *Early Childhood Research Quarterly*, (36), 79–90. <https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2015.12.009>

Dehaene, S. (2011). *The number sense: how the mind creates mathematics*. New York: Oxford University Press.

DeLoache, J.S. (2000). Dual representation and young children's use of scale models. *Child development*, 71(2), 329–338. <https://doi.org/10.1111/1467-8624.00148>

DeLoache, J.S., Schreiver, J.C., Uttal, D. (1995). Waiting to use a symbol: the effects of delay on children's use of models. *Child development*, 66(6), 1875–1889. <https://doi.org/10.2307/1131916>

Diamond, A. (2012). Executive functions. *Annu. Rev. Psychol*, (64), 135–154. <https://doi.org/10.1146/annurev-psych-113011-143750>

Duncan, G., Dowsett, C., Claessens, A., Magnuson, K., Huston, A., Klebanov, P., Japel, C. (2007). School readiness and later achievement. *Developmental Psychology*, 43(6), 1428–1446. <https://doi.org/10.1037/0012-1649.43.6.1428>

Espy, K.A., McDiarmid, M. M., Cwik, M. F., Stalets, M. M., Hamby, A., & Senn, T.E. (2004). The contribution of executive functions to emergent mathematic skills in preschool children. *Developmental Neuropsychology*, 26(1), 465–486. [https://doi.org/10.1207/s15326942dn2601\\_6](https://doi.org/10.1207/s15326942dn2601_6)

Jarvis, H.L., Gathercole, S.E. (2003). Verbal and non-verbal working memory and achievements on national curriculum tests at 11 and 14 years of age. *Educational and Child Psychology*, 20(3), 123–140. <https://doi.org/10.53841/bpsecp.2003.20.3.123>

Jordan, N., Kaplan, D., Ramineni, C., Locuniak, M. (2009). Early math matters: Kindergarten number competence and later mathematics outcomes. *Developmental Psychology*, 45(3), 850–867. <https://doi.org/10.1037/a0014939>

Korkman, M., Kirk, U., Kemp, S.L. (2007). NEPSY II. Administrative Manual. Psychological Corporation.

Malykh, S., Kuzmina, Y., Lysenkova, I., Khusnutdinova, E., Tikhomirova, T. (2020). Cross-cultural longitudinal study of development of approximate number sense across the elementary school years. *Personality and Individual Differences* (157), 31.

Miyake, A., Friedman, N.P., Emerson, M.J., Witzki, A.H., Howerter, A., Wager, T. (2000). The unity and diversity of executive functions and their contributions to complex “frontal lobe” tasks: A latent variable analysis. *Cognitive Psychology*, (41), 49–100. <https://doi.org/10.1006/cogp.1999.0734>

Swanson, H.L., Sachse-Lee, C. (2001). Mathematical problem solving and working memory in children with learning disabilities: Both executive and phonological processes are important. *Journal of Experimental Child Psychology*, (3), 294–321. <https://doi.org/10.1006/jecp.2000.2587>

Veraksa, A.N., Sidneva, A.N., Aslanova, M.S., Plotnikova, V.A. (2022). Effectiveness of different teaching resources for forming the concept of magnitude in older preschoolers with varied levels of executive functions. *Psychology in Russia: State of the Art*, 15(4), 62–82. <https://doi.org/10.11621/pir.2022.0405>

Watts, T., Duncan, G., Siegler, R., Davis-Kean, P. (2014). What's past is prologue: Relations between early mathematics knowledge and high school achievement. *Educational Researcher*, 43(7), 352–360. <https://doi.org/10.3102/0013189X14553660>

Zelazo, P.D. (2006). The Dimensional Change Card Sort (DCCS): A method of assessing executive function in children. *Nature Protocols*, 1(1), 297–301. <https://doi.org/10.1038/nprot.2006.46>

## References

Alexandrova, E.I. (2011). *Mathematics. In the Collection of sample programs for elementary schools*. In: A.B. Vorontsov (Ed.). Moscow: Vita-press (pp. 290–328). (In Russ.).

Best, J.R., Miller, P.H., Naglieri, J.A. (2011). Relations between executive function and academic achievement from ages 5 to 17 in a large, representative national sample. *Learning and Individual Differences*, 21(4), 327–336. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2011.01.007>

Bull, R., Scerif, G. (2001). Executive functioning as a predictor of children's mathematics ability: Inhibition, switching, and working memory. *Developmental Neuropsychology*, 19(3), 273–293. [https://doi.org/10.1207/S15326942DN1903\\_3](https://doi.org/10.1207/S15326942DN1903_3)

Burkitt, E., Barrett, M., Davis, A. (2003). Children's colour choices for completing drawings of affectively characterized topics. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 44(3), 445–455. <https://doi.org/10.1111/1469-7610.00134>

Clements, D.H., Sarama, J., Germeroth, C. (2016). Learning executive function and early mathematics: Directions of causal relations. *Early Childhood Research Quarterly*, (36), 79–90. <https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2015.12.009>

Davydov, V.V. (1962). Analysis of the structure of the account as a prerequisite for building an arithmetic program. Issues of psychology of educational activity of primary school children. In: D.B. Elkonin, V.V. Davydov (Eds.). Moscow: Publishing House of the Academy of Pedagogical Sciences of the RSFSR. (In Russ.).

Davydov, V.V. (2000). *Types of generalization in teaching*. Moscow: Pedagogical Society of Russia. (In Russ.).

Davydov, V.V., Gorbov, S.F., Mikulina, G.G., Savelyeva, O.V. (2011). Mathematics. In the *Collection of sample programs for elementary schools*. In: A.B. Vorontsov (Ed.) (pp. 278–289). Moscow: VITA-PRESS. (In Russ.).

Davydov, V.V., Vardanyan, A.U. (1981). Educational activities and modeling. Moscow. (In Russ.).

Dehaene S. (2011). The number sense: how the mind creates mathematics. New York: Oxford University Press. <https://doi.org/10.1111/1467-8624.00148>

DeLoache, J.S. (2000). Dual representation and young children's use of scale models. *Child development*, 71(2), 329–338.

DeLoache, J.S., Schreiver, J.C., Uttal, D. (1995). Waiting to use a symbol: the effects of delay on children's use of models. *Child development*, 66(6), 1875–1889. <https://doi.org/10.2307/1131916>

Diamond, A. (2012). Executive functions. *Annu. Rev. Psychol.*, (64), 135–154. <https://doi.org/10.1146/annurev-psych-113011-143750>

Duncan, G., Dowsett, C., Claessens, A., Magnuson, K., Huston, A., Klebanov, P., Japel, C. (2007). School readiness and later achievement. *Developmental Psychology*, 43(6), 1428–1446. <https://doi.org/10.1037/0012-1649.43.6.1428>

Elkonin, B.D. (1997). Features of sign mediation in solving creative tasks. *Psihologicheskaya Nauka i Obrazovanie (Psychological Science and Education)*, (3), 55–61. (In Russ.).

Elkonin, D.B. (1989). Selected psychological works. Moscow: Pedagogy. (In Russ.).

Elkoninova, L.I., Bazhanova, T.V. (2007). The form and material of the plot-role-playing game for preschoolers. *Kul'turno-istoricheskaya Psihologiya (Cultural and Historical Psychology)*, 2(3), 2–11. (In Russ.).

Espy, K.A., McDiarmid, M. M., Cwik, M. F., Stalets, M. M., Hamby, A., Senn, T.E. (2004). The contribution of executive functions to emergent mathematic skills in preschool children. *Developmental Neuropsychology*, 26(1), 465–486. [https://doi.org/10.1207/s15326942dn2601\\_6](https://doi.org/10.1207/s15326942dn2601_6)

Galperin, P.Ya. (1966). Psychology of thinking and the doctrine of the gradual formation of mental actions. In the book. *The study of thinking in Soviet psychology*. In: E.V. Shchorokhova (Ed.), (pp. 259–276). Moscow: Nauka. (In Russ.).

Galperin, P.Ya., Georgiev, L.S. (1960). On the question of the formation of initial mathematical concepts. Message 1-V. *Reports of the Academy of Pedagogical Sciences of the RSFSR*, (1), 34–39 (In Russ.).

Jarvis, H.L., Gathercole, S.E. (2003). Verbal and non-verbal working memory and achievements on national curriculum tests at 11 and 14 years of age. *Educational and Child Psychology*, 20(3), 123–140. <https://doi.org/10.53841/bpsecp.2003.20.3.123>

Jordan, N., Kaplan, D., Ramineni, C., Locuniak, M. (2009). Early math matters: Kindergarten number competence and later mathematics outcomes. *Developmental Psychology*, 45(3), 850–867. <https://doi.org/10.1037/a0014939>

Korkman, M., Kirk, U., Kemp, S.L. (2007). NEPSY II. Administrative Manual. Psychological Corporation.

Kulagina, N.V. (2003). Simvol kak sredstvo mirovospriyatiya i miroponimaniya: Diss. kand. filosof. nauk. (Symbol as a means of world perception and world understanding) Cand. Sci. (Philosophy). Moscow. (In Russ.).

Leontiev, A.N. (1960). About the formation of abilities. *Issues in Psychology*, (1), 13–21. (In Russ.).

Malykh, S., Kuzmina, Y., Lysenkova, I., Khusnutdinova, E., Tikhomirova, T. (2020). Cross-cultural longitudinal study of development of approximate number sense across the elementary school years. *Personality and Individual Differences* (157), 31.

Miyake, A., Friedman, N.P., Emerson, M.J., Witzki, A.H., Howerter, A., Wager, T. (2000). The unity and diversity of executive functions and their contributions to complex “frontal lobe” tasks: A latent variable analysis. *Cognitive Psychology*, (41), 49–100. <https://doi.org/10.1006/cogp.1999.0734>

Obukhova, L.F. (1972). Stages of development of children’s thinking. Moscow: Publ. Moscow Univ. Press. (In Russ.).

Piaget, J. (1969). Selected psychological works. The psychology of intelligence. The genesis of a number in a child. Logic and psychology. Moscow: Enlightenment (In Russ.).

Poddyakov, N.N. (1977). The thinking of a preschooler. Moscow: Publishing house "Pedagogy" (In Russ.).

Salmina, N.G. (1988). A sign and a symbol in learning. Moscow: Publ. Moscow Univ. Press (In Russ.).

Sapogova, E.E. (1993). A child and a sign. Psychological analysis of the symbolic activity of a preschooler. Tula: Prioksky Book Publishing House (In Russ.).

Swanson, H.L., Sachse-Lee, C. (2001). Mathematical problem solving and working memory in children with learning disabilities: Both executive and phonological processes are important. *Journal of Experimental Child Psychology*, (3), 294–321. <https://doi.org/10.1006/jecp.2000.2587>

Talyzina, N.F. (2020). *Activity theory of teaching*. Moscow: Publ. Moscow Univ. Press. (In Russ.).

Veraksa, A.N., Sidneva, A.N., Aslanova, M.S., Plotnikova, V.A. (2022). Effectiveness of different teaching resources for forming the concept of magnitude in older preschoolers with varied levels of executive functions. *Psychology in Russia: State of the Art*, 15(4), 62–82. <https://doi.org/10.11621/pir.2022.0405>

Veraksa, A.N., Almazova, O.V., Bukhalenkova, D.A. (2020). Diagnosis of regulatory functions in older preschool age: a battery of techniques. *Psichologicheskij Zhurnal (Psychological Journal)*, 6(41), 108–118 (In Russ.).

Veraksa, A.N. (2014). Simvolicheskoe oposredstvovanie v poznavatel'noj deyatel'nosti doskol'nikov i mladshih shkol'nikov. diss. dokt. psihol. nauk. Symbolic mediation in the cognitive activity of preschoolers and primary school children. Diss. Dr. Sci. (Psychology). Moscow. (In Russ.).

Veraksa, N.E., Veraksa, A.N. (2012). Cognitive development in preschool childhood. Moscow: Mosaic-Synthesis (In Russ.).

Vygotsky, L.S. (1967). Imagination and creativity in childhood. Moscow: Enlightenment (In Russ.).

Vygotsky, L.S. (1984). Collected works in 6 volumes: Vol. 4: Child psychology. Moscow. (In Russ.).

Watts, T., Duncan, G., Siegler, R., Davis-Kean, P. (2014). What's past is prologue: Relations between early mathematics knowledge and high school achievement. *Educational Researcher*, 43(7), 352–360. <https://doi.org/10.3102/0013189X14553660>

Wenger, L.A. (1983). Mastering the indirect solution of cognitive tasks and the development of cognitive abilities of the child. *Issues in Psychology*, (2), 43–50. (In Russ.).

Wenger, L.A. (1986). The development of cognitive abilities in the process of preschool education. Moscow: Pedagogy. (In Russ.).

Zaporozhets, A.V. (1986). Selected psychological works: In 2 volumes. Vol.1. The mental development of the child. Moscow: Pedagogy. (In Russ.).

Zelazo, P.D. (2006). The Dimensional Change Card Sort (DCCS): A method of assessing executive function in children. *Nature Protocols*, 1(1), 297–301. <https://doi.org/10.1038/nprot.2006.46>

Zuckerman, G.A., Polivanova, K.N. (2011). Introduction to school life. The program of adaptation of children to school life. Moscow: Moscow Center for Education Quality (In Russ.).

## ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

**Александр Николаевич Веракса**, доктор психологических наук, профессор, академик РАО, заведующий кафедрой психологии образования и педагогики факультета психологии МГУ имени М.В. Ломоносова, заместитель директора Федерального научного центра психологических и междисциплинарных исследований, Москва, Российская Федерация, [veraksa@yandex.ru](mailto:veraksa@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0002-7187-6080>

**Анастасия Николаевна Сиднева**, кандидат психологических наук, старший научный сотрудник кафедры психологии образования и педагогики факультета психологии МГУ имени М.В. Ломоносова, научный сотрудник Федерального научного центра психологических и междисциплинарных исследований, Москва, Российская Федерация, [asidneva@yandex.ru](mailto:asidneva@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0002-9815-9049>

## ABOUT THE AUTHORS

**Alexander N. Veraksa**, Dr. Sci. (Psychology), Professor, Academician of the Russian Academy of Education, Head of the Department of Psychology of Education and Pedagogy, Faculty of Psychology, Lomonosov Moscow State University, Deputy Director of the Federal Scientific Center for Psychological and Interdisciplinary Research, Moscow, Russian Federation, [veraksa@yandex.ru](mailto:veraksa@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0002-7187-6080>

**Anastasia N. Sidneva**, Cand. Sci. (Psychology), Senior Researcher at the Department of Psychology of Education and Pedagogy, Faculty of Psychology, Lomonosov Moscow State University, Researcher at the Federal Scientific Center for Psychological and Interdisciplinary Research, Moscow, Russian Federation, [asidneva@yandex.ru](mailto:asidneva@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0002-9815-9049>

Поступила: 09.01.2024; получена после доработки: 07.02.2024; принята в печать: 27.02.2024

Received: 09.01.2024; revised: 07.02.2024; accepted: 27.02.2024